

ANALISIS 1 (F)

1. Tunjukkan bahwa $\sup \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 1$

► Buktikan dulu bahwa 1 batas Atasnya.

$\forall n \in \mathbb{N}$, maka pastilah $\frac{1}{n} > 0$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \frac{1}{n} &> 0 \\ \frac{1}{n} + 1 &> 1 \\ \frac{1}{n} + 1 &- \frac{1}{n} \\ 1 &> 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

maka terbukti bahwa 1 merupakan batas atas dari $1 - \frac{1}{n}$

► Buktikan 1 adalah batas atas terkecil atau Supremum dari $1 - \frac{1}{n}$

Ambil sebarang bilangan positif $k (k > 0)$, misalkan $\sup \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \sup(A)$. Maka akan ada bilangan asli $\rightarrow \frac{1}{k} < n$, sehingga $\frac{1}{n} < k$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &< k \\ \frac{1}{n} &- k \\ -\frac{1}{n} &> -k \\ -\frac{1}{n} &+ 1 \end{aligned}$$

$$1 - \frac{1}{n} > 1 - k$$

Berdasarkan Lemma 2.3.4, maka pasti ada u ketika $u - k < s \in S$, maka u adalah supremum S . Jadi, $1 = \sup(A)$

Jawab = $\sup \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 1$ [Terbukti]

3). $S \subseteq \mathbb{R} = \emptyset$. Buktikan bahwa jika ada angka u di $\mathbb{R}$ yang punya anggota.

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, angka $u - \frac{1}{n}$ bukanlah batas atas S .

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, angka $u + \frac{1}{n}$ adalah batas atas S , Lalu $u = \sup S$

Jawab.

(i) Anggap $u - \frac{1}{n}$ adalah batas atas S , maka : u haruslah memenuhi $u \geq s$, untuk tiap $s \in S$. Apabila u bukan batas, maka u memenuhi $u < s$. Sesuai dengansifat Archimedes, untuk $s - u > 0$ maka pastilah terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga

$$s - u > \frac{1}{n}, \text{ akibatnya}$$

$$u + \frac{1}{n} < s. \text{ [Kontradiksi]}$$

Padahal agar $u - \frac{1}{n}$ batas atas S , $u - \frac{1}{n}$ harus memenuhi $u - \frac{1}{n} \geq s, s \in S$. Jadi, terbukti bahwa $u - \frac{1}{n}$ bukan batas atas S

(ii). Ambil $k > 0$, maka pastilah ada $n \in \mathbb{N}$ yang memenuhi $\frac{1}{n} < k$, misal ada v sebarang

batas atas S . Andaikan $u > v$, maka

$$u - v > 0$$

$$\frac{1}{n} < u - v$$

akibatnya

$$v < u - \frac{1}{n}$$

Karena v batas atas S , maka:

$$v \geq s$$

Karena $v < u - \frac{1}{n}$, maka

$$s < u - \frac{1}{n}$$

Dapat disimpulkan $u - \frac{1}{n}$ batas atas S . Padahal pada (i) terbukti bahwa [Kontradiksi]. Sehingga pengandaian salah dan haruslah $u \leq v$.

Sehingga u batas atas terkecil. $\Rightarrow u = \sup S$

5. Anggap S himpunan bagian non-negatif $\mathbb{R}$. Dan terbatas di atas. Anggap $T := \{x^2 : x \in S\}$. Buktikan jika $u = \sup S$ maka $u^2 = \sup T$. Dan beri contoh yang menunjukkan bahwa simpulan salah jika pengecualian terhadap bilangan negatif dihilangkan.

$$0 \leq S \leq \sup(S), \text{ untuk tiap } x \in S,$$

$$0 \leq x^2 \leq \sup(S)^2$$

Dapat diamati bahwa T terbatas atas dan $(\sup S)^2$ batas atas T . Maka

$$0 \leq x^2 \leq V$$

Ketika dimanipulasi lagi akan didapat

$$0 \leq x \leq \sqrt{V}$$

Akibatnya $\sqrt{V}$ adalah batas atas S dan

$\sup S \leq \sqrt{V}$, karena $S \geq 0$ dan

$(\sup S)^2 \leq V$, maka $(\sup S)^2$ batas atas

terkecil T dan $(\sup S)^2 = \sup T$. Jadi

terbukti ketika $u = \sup S$, maka $u^2 = \sup T$

Contoh simpulan salah :

Misal $S = \{-2, 1\}$, maka $T = \{1, 16\}$

yang mana $1 = \sup S$ dan $16 = \sup T$.

Sehingga : $(\sup S)^2 \neq \sup T$

$\equiv$

14. Jika $y > 0$. Tunjukkan bahwa terdapat

$n \in \mathbb{N}$ yang memenuhi $1/2^n < y$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, pasti memenuhi $n < 2^n$

maka $\frac{1}{n} > \frac{1}{2^n}$

Semua bilangan y , pasti akan sama/ dapat dinyatakan dengan $\frac{1}{n}$, maka

$$y > \frac{1}{2^n} \text{ [Terbukti]}$$

$\equiv$